



Fiche pédagogique: Vecteurs et Translation.



Matière : Mathématiques

Professeur : EL OUANJLI NOUREDDINE

Etablissement : ABEDLAKRIM DAOUDI

Année Scolaire : 2025-2026

Durée : 10 h

COMPÉTENCES EXIGIBLES

- * Connaître et utiliser l'écriture vectorielle pour exprimer que la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D .
- * Lier cette écriture Vectorielle au parallélogramme $ABCD$ éventuellement aplati.
- * Utiliser l'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et la relier à la composée de deux translations.
- * Construire un représentant du vecteur somme à l'aide d'un parallélogramme
- * Savoir que l'image d'une figure par deux symétries centrales successives de centres différents est aussi l'image de cette figure par une translation.

ORIENTATIONS PEDAGOGIQUES

Cette rubrique prend en compte les acquis du cycle central sur les parallélogrammes et sur les translations. Elle est orientée vers la reconnaissance, dans les couples (A, A) , (B, B) , (C, C) ... de points homologues par une même translation, d'un même objet nommé vecteur. On écrira $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$. L'un des objectifs est que les élèves se représentent un vecteur à partir d'une direction, d'un sens et d'une longueur. On mettra en évidence la caractérisation d'une égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ à l'aide de milieux de AD et BC . On introduira le vecteur nul $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0} = \dots$ ainsi que l'opposé d'un vecteur. Aucune compétence n'est exigible des élèves sur l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ni, plus généralement, sur la soustraction vectorielle. Des activités de construction permettront de conjecturer le résultat de composition de deux symétries centrales. La démonstration sera l'occasion de revoir la configuration des milieux dans un triangle.

EXTENSIONS

- ☞ Calcul vectoriel (Tronc commun)



PRE-REQUIS

- ☞ Symétrie axiale
- ☞ Les points alignés
- ☞ Le milieu d'un segment
- ☞ Parallélogramme
- ☞ Les quadrilatères particuliers
- ☞ Les transformations géométriques

Objectif

Activités

Activité

$ABCD$ est un trapèze isocèle de bases $[AB]$ et $[CD]$

- 1 Déterminer l'origine et l'extrémité de chaque vecteur : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$
- 2 Déterminer deux vecteurs qui ont la même direction mais qui n'ont pas le même sens ? justifiez votre réponse
- 3 Déterminer deux vecteurs de même direction et de même sens ? justifiez votre réponse
- 4 Déterminer deux vecteurs de même norme ? justifiez votre réponse
- 5 Construire le point M tel que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DM}$ ayant la même direction et le même sens et la même norme ?
- 6 Montrer que $ABMD$ est un parallélogramme ?



Application

ABC est un triangle

- 1 Construire M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$
- 2 Construire N tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CB}$
- 3 Dédire que A le Milieu du $[MN]$

Contenu de Cours

I- Vecteurs :

1- Caractérisation d'un vecteur :

Définition

A et B étant deux points distincts. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par trois éléments :

- La direction qui est celle de la droite (AB) .
- Le sens qui est celui de A vers B .
- La norme qui est la longueur AB .



Remarque

Le point A est appelé origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$
le point B est appelé extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Pour chaque point M du plan : $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$ et s'appelle vecteur nul

2- Égalité de deux vecteurs :

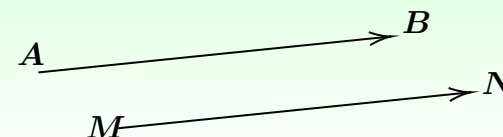
Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont égaux lorsqu'ils ont :

La même direction: $(AB) // (MN)$.

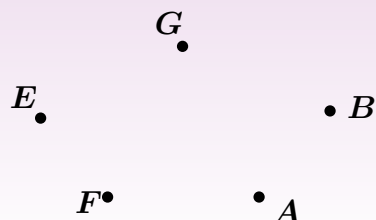
Le même sens : de A vers B est le même que de M vers N

La même norme (la même longueur): $AB = MN$



Activité

- 1 Recopier la figure ci-dessous
- 2 Construire le point H tel que $EFHG$ soit un parallélogramme
- 3 Construire le vecteur $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$
- 4 Construire le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$



Application

$ABCD$ est un parallélogramme

Construire les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$

Montrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BD}$.

Application

I- ABC est un triangle et I le milieu du coté $[BC]$

- 1 Construire D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{IB}$
- 2 Montrer que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AI}$

II- Simplifier ce qui suit :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{FG} \\ &\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} \\ &\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GF} \\ &\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EA} - \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

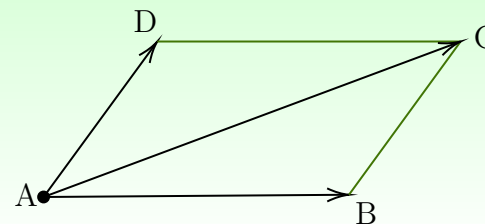
Remarque

- ❖ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ si le quadrilatère $ABNM$ est un parallélogramme.
- ❖ L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$ et on a : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
- ❖ A et B et M sont des points distincts M est le Milieu du segment $[AB]$ Donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

II- Somme de deux Vecteurs :

Définition

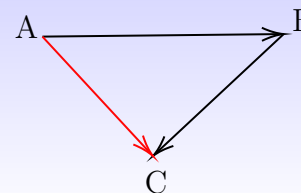
La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$ tel que $ABCD$ est un parallélogramme et On écrit : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



Propriété (Relation de Chasles)

A, B et C sont trois points du plan.

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Activité

- ❶ Recopie l'axe (D)
- ❷ Combien de points M existe-t-il sur (D) tels que $AM = \frac{4}{3}AB$
- ❸ $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même sens et $AE = \frac{1}{3}AB$ et on écrit $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
- ❹ Placer les points F et G sur (D) tels que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Activité

- ❶ Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et M un point dans l'espace
- ❷ Construire C tel que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$
- ❸ Construire N tel que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$
- ❹ Montrer que $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB}$
- ❺ Montrer que $(MN) // (AB)$

Application

ABC est un triangle

- construire M tel que : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$
- construire N tel que : $\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{CA}$
- 1—Montrer que $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$
- 2—Montrer que $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{BC}$
- 3— Dédurre que $(MN) // (BC)$



Exemple

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

III-Multiplication d'un vecteur par un réel :

Définition

A et B étant deux points distincts et k un réel non nul.

Le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par k est le vecteur noté $k\overrightarrow{AB}$ tel que :

- ⇒ $\overrightarrow{AB}$ et $k\overrightarrow{AB}$ ont la même direction ;
- * Si $k > 0$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $k\overrightarrow{AB}$ ont le même sens et la norme de $k\overrightarrow{AB}$ est égale à $k \times AB$.
- * Si $k < 0$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $k\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire et la norme de $k\overrightarrow{AB}$ égale à $-k \times AB$.

Conséquences :

- * On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.
- * Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si, il existe un nombre réel k , tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$ si et seulement si, il existe un nombre réel k' , tel que : $\vec{u} = k'\vec{v}$
- * Soit A, B, C et D quatre points du plan. Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, si et seulement si, les droites (AB) et (CD) sont parallèles
- * Soient A, B , et C trois points du plan. Les trois points A, B et C sont alignés, si et seulement si, deux des trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Activité

$\vec{AB}$ un vecteur et M un point dans l'espace
Construire M' tel que $\vec{MM'} = \vec{AB}$ (on dit que M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B)

Application

$ABCD$ est un parallélogramme

Construire E l'image de A par la translation qui transforme B en D

Construire F l'image de B par la translation qui transforme A en C

Montrer que E est l'image de D par la translation qui transforme C en B

Montrer que F est l'image de C par la translation qui transforme D en A

Déduire que $\vec{ED} = \vec{DC} = \vec{CF}$ et $\vec{EF} = 3\vec{AB}$

Application

$EFGH$ est un carré tel que $EF = 3cm$

Construire A l'image de E par la translation t de vecteur $\vec{EG}$

Construire B l'image de H par la translation t

Calculer la distance AB



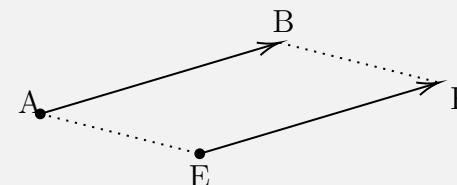
IV-Translation :

Définition

A et B deux points distincts M' l'image de M par la translation qui transforme A en B (de vecteur $\vec{AB}$) signifie que $ABMM'$ est un parallélogramme

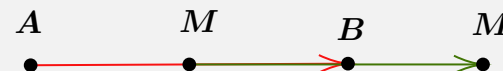
Exemple 1

On a $\vec{AB} = \vec{EF}$ Donc F est l'image de E par la translation qui transforme A en B On dit aussi F est l'image de E par la translation de vecteur $\vec{AB}$



Exemple 1

M' l'image de M par la translation qui transforme A en B



V-Image d'un segment, d'une droite et d'une demi-droite

1-Image d'un segment par une translation

Propriété

L'image d'un segment par une translation est un segment de même longueur. On dit que la translation conserve les distances.

Application

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O

Construire E l'image de D par la translation de vecteur $\vec{AC}$

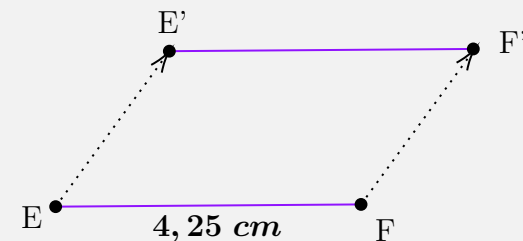
Construire F le symétrique de D par rapport à A

Montrer que O est le milieu de $[EF]$



Exemple

Dans la figure ci-dessous : $[E'F']$ est l'image du segment $[EF]$ par la translation de vecteur $\vec{EE'}$ et $E'F' = 4,25cm$



2-Image d'une droite et demi-droite par une translation

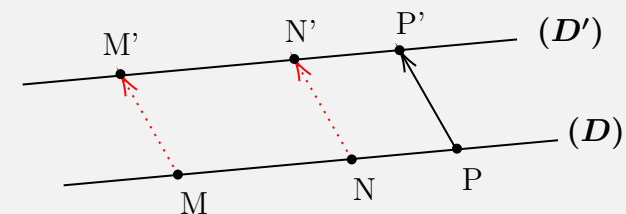
Propriété

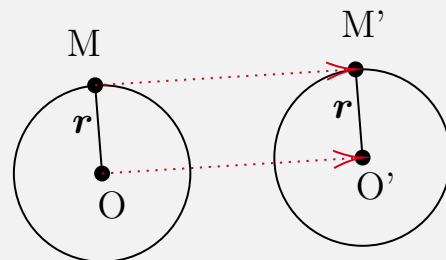
L'image d'une droite (D) (d'une demi-droite) par une translation est une droite (D') (est une demi-droite) avec $(D') \parallel (D)$. On dit que la translation conserve l'alignement des points. L'image d'une demi-droite par une translation est une demi-droite de même sens.

Exemple

Dans la figure ci-dessous : M' , N' et P' sont des images des points alignés M , N et P par la translation de vecteur $\vec{PP'}$. Alors M' , N' et P' sont alignés.

Et on a (D') image de (D) par la translation de vecteur $\vec{PP'}$. Alors : $(D') \parallel (D)$





VI-Image d'un angle et d'un cercle par une translation :

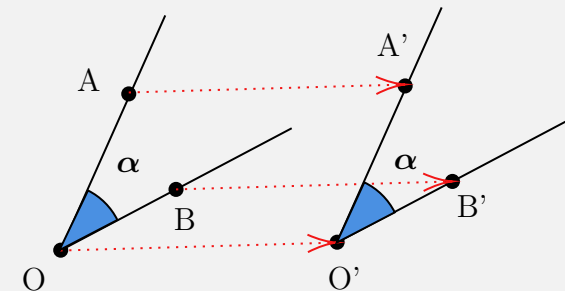
1-Image d'un angle par une translation :

Propriété

L'image d'un angle par une translation est un angle de même mesure.

Exemple 1

On a dans la figure ci-dessous : $A'\hat{O}'B'$ image de l'angle $A\hat{O}B$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et $A'\hat{O}'B' = A\hat{O}B = \alpha$



2- Image d'un cercle par une translation :

Propriété

L'image d'un cercle de centre O par une translation est un cercle de même rayon et de centre O' l'image de O par cette translation.

Exemple 1

On a : M' image de point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ et $O'M' = OM = r$
Alors (C') image du cercle (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.